Microscopic Theory of Laser Master Equation up to the Forth Order

AUTHOR(S):

冨永, 哲雄; 有光, 敏彦

冨永哲雄・有光敏彦

F. Shibata and N. Hashitsume: J. Phys. Soc. Jpn. **44** (1978) 1435.

後半の話は

T. Arimitsu and F. Shibata: J. Phys. Soc. Japn., to be published.

Microscopic Theory of Laser Master Equation up to the Forth Order

筑波大・物理　冨永哲雄・有光敏彦

1. Introduction

レーザー系のマスター方程式（Fokker-Planck 方程式）の導出の仕方には，Risken の semiclassical theory,[1] Haake の microscopic theory[2] がある。レーザーのモデルは，2準位原子N個の系と1モード光子系が双極子相互作用しているというもので，Risken は，光子系を古典的に，原子系を量子論的に扱い，熱浴による dumping の効果，原子系を pump している効果，光子系を古典的に扱ったために現れなかった fluctuation の効果を現象論的に入れてマスター方程式を導出した。 Haake は，光子系，原子系ともに量子論的に扱い，熱浴（pumping も含む）も最初から考慮して， time-convolution （TC）形式の減衰理論[3] を用いて，光子系と原子系の相互作用に関して4次までの範囲でマスター方程式を導出した。

$$\dot{\rho}(t)=\hat{\Lambda}_{\mathrm{F}}\,\rho(t)+\int_0^t \mathrm{d}t'\,\hat{K}^{\mathrm{TC}}(t')\,\rho(t-t')$$

Haake は，長時間極限におけるこの方程式は，Boson Coherent 表示で，

$$\dot{f}(t)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial\beta^*}\beta^*+\frac{\partial}{\partial\beta}\beta\right)(\kappa-\alpha_1+\alpha_{\mathrm{nl}}\beta^*\beta)+4q\frac{\partial^2}{\partial\beta^*\partial\beta}\right]f(t)$$

となり Risken の Fokker-Planck 方程式に一致すると主張したが，そこには問題点が1つある。それは，Haake 自身指摘している通り，Haake が落とした項の中に order estimate では落とせない物理的でない項が含まれているということである。このことは，TC形式の減衰理論で得られた convolution 型の方程式について， convolution 積分のところを正しく扱わないで，naive に長時間極限をとると正しい結果が得られないということを示している。

我々は，Haake と同じモデルで time-convolution-less （TCL）形式の減衰理論[3] を

用いて光子系と原子系の相互作用に関して４次まで計算した。その結果，すべての時間領域で正しい振舞を与え，長時間極限で Risken の Fokker-Planck 方程式に一致する，一般化された Fokker-Planck 方程式が得られた。[4)]

2. Model and Formulation

モデルハミルトニアンは，

$$H = H_0 + H_1$$
$$H_0 = H_L + H_A + g_{AL} H_{AL} + H_R, \quad H_1 = H_{LR} + H_{AR}$$
$$H_L = \omega_L b^+ b, \quad H_A = \omega_A \sum_\mu S^z_\mu + \frac{1}{2}\omega_A N, \quad g_{AL} H_{AL} = g_{AL} \sum_\mu (S^+_\mu b + S^-_\mu b^+)$$
$$H_{LR} = g_L (b R^+_L + b^+ R_L), \quad H_{AR} = g_A \sum_\mu (R^-_A S^+_\mu + R^+_A S^-_\mu + R^z_A S^z_\mu)$$

Liouville 方程式

$$\frac{d}{dt} W(t) = -iH^\times W(t)$$

Conventional な方法で熱浴の情報を消去し，さらに， resonant case ($\tilde{\omega}_A = \tilde{\omega}_L = \omega$, $\tilde{\omega}$ は熱浴によるシフトを受けた振動数)，原子系の緩和時間は光子系のそれに比べて短かいという事実を使って，原子系の情報をＴＣＬ形式の減衰理論で消去した。

$$\dot{\bar{\rho}}_L(t) = \hat{\Lambda}_L \bar{\rho}_L(t) + \hat{K}^{TCL}(t) \bar{\rho}_L(t) \tag{1}$$

ここで

$$\hat{K}^{TCL}(t)\bar{\rho}_L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i g_{AL})^n \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} < \hat{H}^\times_{AL}(t) \cdots \hat{H}^\times_{AL}(t_{n-1}) >_{O.C} \bar{\rho}_L(t)$$

であり，対応するＴＣ形式の表式は，

$$\int_0^t dt' K^{TC}(t') \rho(t-t') = \sum_{n=1}^{\infty} (-i g_{AL})^n \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} < \hat{H}'_{AL}(t) \cdots \hat{H}^\times_{AL}(t_{n-1}) >_{P.C} \rho(t_{n-1})$$

である。$<\cdots\cdots>_{O.C}$ は ordered cumulant (O.C.), $<\cdots\cdots>_{P.C}$ は partial cumulant (P.C.)[3)] を表わす。O.C.， P.C. の違いは３次以上で現われ，このレーザーモデルでは，４次の項で現われる。O.C. はオペレーター性を無視すると，普通のキュムラントに一致するが， P.C. は一致しない。そのために P.C. では４次の項の中に N^2 (N は原子数) に比例する項が残ってしまい，この項のために， convolution 積分を止めて長時間極限をとる操作がで

きなくなる。O.C.では，光子系のオペレーター性のためにN^2の項がすべてキャンセルしてしまうことはないが，その項は，長時間極限において２次の項のg_{AL}^2にくり込まれる形をしている。

(1)式を Boson Coherent 表示で表わし，Order estimate により余分な項を省略すると，

$$\dot{f}(t) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\beta^*}\beta^* + \frac{\partial}{\partial\beta}\beta\right)\left(\kappa - \tilde{\alpha}_1(t) + \alpha_{n1}(t)\beta^*\beta\right) + \tilde{q}(t)\frac{\partial^2}{\partial\beta^*\partial\beta}\right]f(t)$$

となる。さらに，長時間極限をとると，

$$\dot{f}(t) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\beta^*}\beta^* + \frac{\partial}{\partial\beta}\beta\right)\left(\kappa - \tilde{\alpha}_1 + \alpha_{n1}\beta^*\beta\right) + \tilde{q}\frac{\partial^*}{\partial\beta^*\partial\beta}\right]f(t)$$

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \frac{N g_{AL}^2 \sigma_0}{r_\perp}\left(1 - \frac{N g_{AL}^2 \sigma_0}{r_\perp^2}\right) \\ \tilde{q} &= \frac{N g_{AL}^2 (H\sigma_0)}{r_\perp}\left(1 - \frac{N g_{AL}^2 \sigma_0}{r_\perp^2}\right) \\ \alpha_{n1} &= \frac{4 N g_{AL}^4 \sigma_0}{r_\perp^2 r_{/\!/}} \end{aligned}\right.$$

となる。$\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{q}$ の第２項が光子系のオペレーター性による量子論的補正である。

４次の項の計算は非常に複雑であるが，鏡映演算子を用いたダイアグラム法[5] を使うと見通し良く計算できる。

3. references

1) H. Risken; *"Progress in Optics"* Vol. VIII, pp. 239–294.
2) F. Haake; Z. Physik, **227,** (1969) 179.
3) F. Shibata and T. Arimitsu; J. Phys. Soc. Jpn. **49,** (1980) 891.
4) T. Arimitsu and T. Tominaga; J. Phys. Soc. Jpn. **51,** (1982) No. 10.
5) T. Arimitsu; J. Phys. Soc. Jpn. **51,** (1982) 1720.

Al－Zn合金等の相分離過程

広島大学総合科学部　　好 村 滋 洋

二元系合金における相分離過程の研究は，実用上重要であるばかりでなく，Cahn[1] の〃ス